Метод сопряженных градиентов - CG

 (1)

 (2)

Итерация  метода CG минимизирует функционал

 (3)

Здесь  - нулевое приближение, - подпространство Крылова

 (4)

 и  - невязки на 0 и k итерации.

Если - минимальное значение (в ), то



Покажем, что точное решение (1) 

Из теоремы Кэли-Гамильтона следует





Умножая  на , находим

, т.е. .

Свойства :







Если найдена CG итерация , то либо , либо можно найти вектор направления поиска такой, что

 (5)

Как только  установлен, скаляр находим из условия минимума  в точке :

, (6)

или  (7)

(7)   (8)

*Лемма 1* Пусть  и  итерации CG. Тогда

 (9)

Док. Так как  минимизирует  на , то 

 при  (10)

Поскольку  (11)

то  (12)

Так как  ( и свойство вложения ),

то лемма доказана.  Если  то  и из Л.1 следует: 

*Лемма 2* Пусть  и  итерации CG. Если , то  и  определяется с точностью до скалярного множителя условиями

 (13)

Док. Так как , то по Л.1

 (14)

Из (12, 14)  (15)

Из (14)   является - ортогональным . 

Условие называют -сопряженностью  подпространству . Любой , удовлетворяющий (13), можно представить в виде



с точностью до скалярного множителя.

*Теорема 1.* Пусть , . Тогда

 (16)

Док. Из Л.2 и  следует, что достаточно найти , при котором  из (16) удовлетворяет условиям

 (17)

Из (16)   (18)

Если , то . Из Л.2 

. (19)

Если , то из (18) находим 

  (20)

Покажем, что знаменатель в (20) ненулевой.

Из (5)   (21)

Поэтому  (22)

Так как  по Л.1, то

 (23)

Можно показать, что

 (24)

С учетом изложенного, запишем псевдокод метода CG





















Для оценки погрешности CG можно использовать формулу

 (25)